

Cálculo

Cálculo

Sexta edición

Robert A. Adams
University of British Columbia

Traducción:
Inés Portillo García
Universidad Pontificia de Comillas

Revisión técnica:
Javier Portillo García
Universidad Politécnica de Madrid



Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo
San Juan • San José • Santiago • São Paulo • Reading, Massachusetts • Harlow, England

CÁLCULO

Robert A. Adams

PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2009

ISBN: 978-84-7829-089-5

Materia: 517 – Cálculo

Formato 195 × 250 mm

Páginas: 1240

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (arts. 270 y sgts. Código penal).

Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos: www.cedro.org), si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

DERECHOS RESERVADOS

© 2009 por PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Ribera del Loira, 28

28042 Madrid (España)

CÁLCULO

Robert A. Adams

ISBN: 978-84-7829-089-5

Depósito legal: M.

Equipo editorial:

Editor: Miguel Martín-Romo

Técnico editorial: Marta Caicoya

Equipo de producción:

Director: José Antonio Clares

Técnico: Irene Iriarte

Diseño de cubierta: Equipo de diseño de Pearson Educación, S.A.

Composición COPIBOOK

Impreso por:

IMPRESO EN ESPAÑA - *PRINTED IN SPAIN*

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

Nota sobre enlaces a páginas web ajenas: Este libro puede incluir enlaces a sitios web gestionados por terceros y ajenos a PEARSON EDUCACIÓN S.A. que se incluyen sólo con finalidad informativa. PEARSON EDUCACIÓN S.A. no asume ningún tipo de responsabilidad por los daños y perjuicios derivados del uso de los datos personales que pueda hacer un tercero encargado del mantenimiento de las páginas web ajenas a PEARSON EDUCACIÓN S.A. y del funcionamiento, accesibilidad o mantenimiento de los sitios web no gestionados por PEARSON EDUCACIÓN S.A. Las referencias se proporcionan en el estado en que se encuentran en el momento de publicación sin garantías, expresas o implícitas, sobre la información que se proporcione en ellas.

A Anne



Contenido

Prólogo	
Al estudiante	
Al profesor	
Agradecimientos	
¿Qué es el cálculo?	

P

Preliminares

1

P.1. Los números reales y la recta real	2
Intervalos	4
El valor absoluto	7
Ecuaciones e inecuaciones con valores absolutos.....	8
P.2. Coordenadas cartesianas del plano	11
Escala de los ejes	12
Incrementos y distancias	12
Gráficas	13
Líneas rectas	14
Ecuaciones de la recta	16
P.3. Gráficas de ecuaciones cuadráticas	19
Circunferencias y discos	19
Ecuaciones de parábolas	22
Propiedades de reflexión de las parábolas	23
Escala de una gráfica	24
Desplazamiento de una gráfica	25
Elipses e hipérbolas	26
P.4. Funciones y sus gráficas	29
Convenio para el dominio	31
Gráficas de funciones	32
Funciones pares e impares. Simetría y reflexiones	35
Reflexiones en rectas	36
Definición y dibujo de funciones con Maple	37
P.5. Combinación de funciones para crear otras nuevas	39
Sumas, diferencias, productos, cocientes y múltiplos	39

Composición de funciones	113
Funciones definidas por tramos	114
P.6. Polinomios y funciones racionales	47
Raíces y factores	48
Raíces y factores de polinomios cuadráticos	49
Factorizaciones diversas	51
P.7. Las funciones trigonométricas	53
Identidades de utilidad	56
Algunos ángulos especiales	57
Fórmulas de sumas	60
Otras funciones trigonométricas	61
Cálculos con Maple	64
Repaso de trigonometría	65

1 Límites y continuidad 71

1.1. Ejemplos de velocidad, tasa de crecimiento y área	72
Velocidad media y velocidad instantánea	72
Crecimiento de un cultivo de algas	73
Área de un círculo	74
1.2. Límites de funciones	77
Límites unilaterales	80
Reglas para el cálculo de límites	82
El teorema del sándwich	83
1.3. Límites en el infinito y límites infinitos	86
Límites en el infinito	86
Límites en el infinito de funciones racionales	88
Límites infinitos	89
Uso de Maple para calcular límites	91
1.4. Continuidad	93
Continuidad en un punto	94
Continuidad en un intervalo	95
Existen muchas funciones continuas	96
Extensiones continuas y discontinuidades evitables	97
Funciones continuas en intervalos cerrados y finitos	98
Obtención de máximos y mínimos por métodos gráficos	100
Cálculo de raíces de ecuaciones	101
1.5. Definición formal de límite	105
Uso de la definición de límite para demostrar teoremas	107
Otras clases de límites	107
Repaso del capítulo	111

2 Diferenciación 113

2.1. Rectas tangentes y sus pendientes	114
Normales	118
2.2. La derivada	120
Algunas derivadas importantes	121

Notación de Leibniz	124
Diferenciales	127
Las derivadas tienen la propiedad del valor medio	127
2.3. Reglas de diferenciación	129
Sumas y productos por constantes	130
Regla del Producto	132
Regla de la Inversa	134
Regla del Cociente	136
2.4. Regla de la Cadena	138
Cálculo de derivadas con Maple	141
Uso de la Regla de la Cadena en las fórmulas de diferenciación	142
Demostración de la Regla de la Cadena (Teorema 6)	142
2.5. Derivadas de funciones trigonométricas	144
Algunos límites especiales	144
Derivadas del seno y el coseno	146
Derivadas de otras funciones trigonométricas	148
2.6. El Teorema del Valor Medio	151
Funciones crecientes y decrecientes	154
Demostración del Teorema del Valor Medio	156
2.7. Aplicación de las derivadas	159
Aproximación de pequeños cambios	159
Velocidad de cambio media e instantánea	160
Sensibilidad a los cambios	161
Derivadas en economía	162
2.8. Derivadas de orden superior	165
2.9. Diferenciación implícita	169
Derivadas de orden superior	172
Regla General de la Potencia	174
2.10. Primitivas y problemas de valor inicial	175
Primitivas	175
La integral indefinida	176
Ecuaciones diferenciales y problemas de valor inicial	178
2.11. Velocidad y aceleración	182
Velocidad	182
Aceleración	183
Caída libre	186
Repaso del capítulo	188

3.1. Funciones inversas	194
Inversión de funciones que no son uno a uno	197
Derivadas de funciones inversas	198
3.2. Las funciones exponencial y logarítmica	200
Exponenciales	200
Logaritmos	202

3.3. La exponencial y el logaritmo natural	205
El logaritmo natural	205
La función exponencial	209
Exponenciales y logaritmos generales	211
Diferenciación logarítmica	213
3.4. Crecimiento y decrecimiento	216
Crecimiento de exponenciales y logaritmos	216
Modelos de crecimiento y decrecimiento exponencial	217
Interés de inversiones	220
Crecimiento logístico	222
3.5. Funciones trigonométricas inversas	225
Función inversa del seno (o arcoseno)	225
Función inversa de la tangente (o arcotangente)	229
Otras funciones trigonométricas inversas	231
3.6. Funciones hiperbólicas	235
Funciones hiperbólicas inversas	238
3.7. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes ...	240
Procedimiento para resolver $ay'' + by' + cy = 0$	241
Movimiento armónico simple	243
Movimiento armónico amortiguado	246
Repaso del capítulo	249

4

Aplicaciones de las derivadas

4.1. Tasas relacionadas	254
Procedimiento para problemas de tasas relacionadas	255
4.2. Problemas de valores extremos	260
Valores máximo y mínimo	260
Puntos críticos, puntos singulares y extremos	262
Cálculo de valores extremos absolutos	262
El test de la primera derivada	263
Funciones no definidas en intervalos cerrados y finitos	265
4.3. Concavidad y puntos de inflexión	269
El test de la segunda derivada	272
4.4. Dibujo de la gráfica de una función	274
Asíntotas	275
Ejemplos de dibujo formal de curvas	279
4.5. Problemas de valores extremos	284
Procedimiento para resolver problemas de valores extremos	285
4.6. Cálculo de raíces de ecuaciones	293
Método de Newton	294
Iteración del punto fijo	297
Rutinas «Solve»	299
4.7. Aproximaciones lineales	301
Aproximación de valores de funciones	302
Análisis del error	303

4.8. Polinomios de Taylor	306
Fórmula de Taylor	309
Notación O	312
4.9. Formas indeterminadas	315
Reglas de l'Hôpital	317
Repaso del capítulo	322

5 Integración **327**

5.1. Sumas y notación sigma	328
Cálculo de sumas	329
5.2. Áreas como límites de sumas	333
El problema básico del área	334
Cálculo de algunas áreas	335
5.3. La integral definida	339
Particiones y sumas de Riemann	339
La integral definida	341
Sumas de Riemann generales	343
5.4. Propiedades de la integral definida	345
Un Teorema del Valor Medio para integrales	348
Definición de integrales de funciones continuas por tramos	349
5.5. El Teorema Fundamental del Cálculo	352
5.6. El método de sustitución	358
Integrales trigonométricas	363
5.7. Áreas de regiones planas	367
Área entre dos curvas	368
Repaso del capítulo	372

6 Técnicas de integración **375**

6.1. Integración por partes	376
Fórmulas de reducción	379
6.2. Sustituciones inversas	382
Las sustituciones trigonométricas inversas	382
Completar el cuadrado	386
Otras sustituciones inversas	388
El cambio $\tan(\theta/2)$	389
6.3. Integrales de funciones racionales	391
Denominadores lineales y cuadráticos	392
Descomposición en fracciones simples	393
6.4. Integración mediante programas de computador o tablas	399
Uso de Maple para integración	399
Uso de tablas de integrales	401
6.5. Integrales impropias	403
Integrales impropias de tipo I	403
Integrales impropias de tipo II	405

Estimación de la convergencia y la divergencia	409
6.6. La Regla del Trapecio y la Regla del Punto Medio	412
La Regla del Trapecio	412
La Regla del Punto Medio	415
Estimaciones del error	417
6.7. La Regla de Simpson	420
6.8. Otros aspectos de la integración aproximada	425
Aproximación de integrales impropias	425
Uso de la fórmula de Taylor	426
Integración de Romberg	427
Otros métodos	430
Repaso del capítulo	431

7 Aplicaciones de la integración **435**

7.1. Cálculo de volúmenes mediante rodajas: Sólidos de revolución	436
Cálculo de volúmenes mediante rodajas	436
Sólidos de revolución	438
Tubos cilíndricos	441
7.2. Más volúmenes mediante rodajas	446
7.3. Longitud de un arco y área de una superficie	450
Longitud de un arco	451
Longitud de arco de la gráfica de una función	451
Áreas de superficies de revolución	456
7.4. Masas, momentos y centros de masas	459
Masa y densidad	459
Momentos y centros de masas	462
Ejemplos en dos y tres dimensiones	464
7.5. Centroides	467
Teorema de Pappus	471
7.6. Otras aplicaciones en física	474
Presión hidrostática	474
Trabajo	476
Energía potencial y energía cinética	478
7.7. Aplicaciones en negocios, finanzas y ecología	481
Valor actual de una serie de pagos futuros	481
Economía de explotación de recursos renovables	482
7.8. Probabilidad	485
Variables aleatorias discretas	486
Esperanza, media, varianza, y desviación típica	488
Variables aleatorias continuas	490
La distribución normal	494
7.9. Ecuaciones diferenciales de primer orden	499
Ecuaciones separables	499
Ecuaciones lineales de primer orden	503
Repaso del capítulo	507

8**Cónicas, curvas paramétricas y curvas en polares****513**

8.1. Cónicas	514
Parábolas	515
Propiedad focal de la parábola	516
Elipses	517
La propiedad focal de la elipse	519
Directrices de una elipse	519
Hipérbolas	520
Propiedad focal de una hipérbola	522
Clasificación de cónicas generales	523
8.2. Curvas paramétricas	527
Curvas planas generales y parametrizaciones	530
Algunas curvas planas de interés	531
8.3. Curvas paramétricas suaves y sus pendientes	535
Pendiente de una curva paramétrica	536
Dibujo de curvas paramétricas	537
8.4. Longitudes de arco y áreas de curvas paramétricas	539
Longitudes de arco y áreas de superficie	539
Áreas limitadas por curvas paramétricas	541
8.5. Coordenadas polares y curvas en polares	545
Algunas curvas en polares	547
Intersecciones de curvas en polares	551
Cónicas en polares	552
8.6. Pendientes, áreas y longitudes de arco de curvas en polares	554
Áreas limitadas por curvas en polares	555
Longitudes de arco de curvas en polares	557
Repaso del capítulo	559

9**Secuencias, series y series de potencias****561**

9.1. Secuencias y convergencia	562
Convergencia de secuencias	564
9.2. Series infinitas	570
Serie geométrica	571
Series telescópicas y series armónicas	573
Algunos teoremas sobre series	575
9.3. Tests de convergencia para series positivas	577
El test de la integral	577
Uso de cotas de integrales para estimar la suma de una serie	579
Tests de comparación	580
Tests de la razón y de la raíz	583
Uso de cotas de la serie geométrica para estimar la suma de una serie	585
9.4. Convergencia absoluta y condicional	588
El test de la serie alternante	589
Reordenación de los términos de una serie	592
9.5. Series de potencias	594
Operaciones algebraicas en series de potencias	597

	Diferenciación e integración de series de potencias	599
	Cálculos con Maple	604
9.6.	Series de Taylor y Maclaurin	605
	Series de Maclaurin de algunas funciones elementales	607
	Otras series de Taylor y Maclaurin	609
	Revisión de la fórmula de Taylor	612
9.7.	Aplicaciones de las series de Taylor y Maclaurin	615
	Aproximación de valores de funciones	615
	Funciones definidas por integrales	616
	Formas indeterminadas	617
9.8.	El teorema binomial y la serie binomial	619
	La serie binomial	620
9.9.	Series de Fourier	623
	Funciones periódicas	623
	Series de Fourier	624
	Convergencia de la serie de Fourier	626
	Serie de Fourier en cosenos y senos	628
	Repaso del capítulo	629

10	Vectores y geometría de coordenadas en el espacio tridimensional	633
-----------	---	------------

10.1.	Geometría analítica en tres dimensiones	634
	Espacio euclídeo n -dimensional	638
	Descripción de conjuntos en el plano, el espacio tridimensional y el espacio n -dimensional	639
10.2.	Vectores	641
	Vectores en el espacio tridimensional	644
	Cables y cadenas que cuelgan	646
	Producto escalar y proyecciones	648
	Vectores en el espacio n -dimensional	650
10.3.	Producto vectorial en el espacio tridimensional	652
	Determinantes	655
	El producto vectorial como un determinante	657
	Aplicaciones del producto vectorial	659
10.4.	Planos y rectas	661
	Planos en el espacio tridimensional	662
	Rectas en el espacio tridimensional	664
	Distancias	666
10.5.	Superficies cuadráticas	669
10.6.	Un poco de álgebra lineal	673
	Matrices	674
	Determinantes e inversos de matrices	675
	Transformaciones lineales	678
	Ecuaciones lineales	678
	Formas cuadráticas, autovalores y autovectores	681
10.7.	Uso de Maple para cálculos con vectores y matrices	683
	Vectores	684

Matrices	689
Ecuaciones lineales	691
Autovectores y autofunciones	692
Repaso del capítulo	693

11 Funciones vectoriales y curvas **697**

11.1. Funciones vectoriales de una variable	698
Diferenciación de combinaciones de vectores	702
11.2. Algunas aplicaciones de la diferenciación vectorial	705
Movimiento de una masa variable	705
Movimiento circular	706
Sistemas en rotación y el efecto de Coriolis	708
11.3. Curvas y parametrizaciones	713
Parametrización de la curva de intersección de dos superficies	715
Longitud de arco	716
Curvas suaves por tramos	718
Parametrización mediante la longitud de arco	718
11.4. Curvatura, torsión y sistema de referencia de Frenet	720
El vector tangente unitario	720
Curvatura y normal unitaria	721
Torsión y binormal, fórmulas de Frenet-Serret	725
11.5. Curvatura y torsión para parametrizaciones generales	728
Aceleración tangencial y normal	730
Evolutas	731
Aplicación al diseño de vías (o carreteras)	732
Cálculos con Maple	734
11.6. Leyes de Kepler del movimiento planetario	737
Elipses en coordenadas polares	738
Componentes polares de la velocidad y la aceleración	740
Fuerzas centrales y segunda ley de Kepler	741
Obtención de las leyes de Kepler primera y tercera	742
Conservación de la energía	745
Repaso del capítulo	748

12 Diferenciación parcial **753**

12.1. Funciones de varias variables	754
Representaciones gráficas	754
Uso de gráficos en Maple	758
12.2. Límites y continuidad	762
12.3. Derivadas parciales	766
Planos tangentes y rectas normales	770
Distancia de un punto a una superficie: un ejemplo geométrico	772
12.4. Derivadas de orden superior	774
Las ecuaciones de Laplace y de onda	777
12.5. La Regla de la Cadena	780
Funciones homogéneas	786
Derivadas de orden superior	786

12.6. Aproximaciones lineales, diferenciabilidad y diferenciales	791
Demostración de la Regla de la Cadena	794
Diferenciales	795
Funciones de un espacio de n dimensiones en un espacio de m dimensiones	796
12.7. Gradientes y derivadas direccionales	799
Derivadas direccionales	801
Tasas de cambio percibidas por un observador en movimiento	805
El gradiente en tres y más dimensiones	806
12.8. Funciones implícitas	811
Sistemas de ecuaciones	812
Determinantes jacobianos	815
El Teorema de la Función Implícita	816
12.9. Aproximaciones mediante series de Taylor	821
Aproximación de funciones implícitas	824
Repaso del capítulo	826

13 Aplicaciones de las derivadas parciales **829**

13.1. Valores extremos	830
Clasificación de los puntos críticos	833
13.2. Valores extremos de funciones definidas en dominios restringidos	838
Programación lineal	842
13.3. Multiplicadores de Lagrange	845
El método de los multiplicadores de Lagrange	846
Problemas con más de una restricción	850
Programación no lineal	852
13.4. El método de los mínimos cuadrados	855
Regresión lineal	856
Aplicaciones del método de los mínimos cuadrados a integrales	858
13.5. Problemas paramétricos	861
Diferenciación de integrales con parámetros	862
Envoltentes	865
Ecuaciones con perturbaciones	869
13.6. Método de Newton	871
Realización del Método de Newton utilizando una hoja de cálculo	873
13.7. Cálculos con Maple	875
Resolución de sistemas de ecuaciones	875
Búsqueda y clasificación de puntos críticos	877
Repaso del capítulo	880

14 Integración múltiple **883**

14.1. Integrales dobles	884
Integrales dobles en dominios más generales	886
Propiedades de la integral doble	888
Resolución de integrales dobles por inspección	888

14.2.	Iteración de integrales dobles en coordenadas cartesianas	891
14.3.	Integrales impropias y un teorema del valor medio	899
	Integrales impropias de funciones positivas	899
	Un teorema del valor medio para integrales dobles	903
14.4.	Integrales dobles en coordenadas polares	906
	Cambio de variables en integrales dobles	911
14.5.	Integrales triples	917
14.6.	Cambio de variables en integrales triples	924
	Coordenadas cilíndricas	924
	Coordenadas esféricas	927
14.7.	Aplicaciones de las integrales múltiples	932
	Área de la superficie de una gráfica	933
	Atracción gravitatoria de un disco	934
	Momentos y centros de masa	935
	Momento de inercia	938
	Repaso del capítulo	942

15**Campos vectoriales****945**

15.1.	Campos escalares y vectoriales	946
	Líneas de campo (curvas integrales)	947
	Campos vectoriales en coordenadas polares	949
15.2.	Campos conservativos	951
	Superficies y curvas equipotenciales	953
	Fuentes, sumideros y dipolos	957
15.3.	Integrales sobre curvas	960
	Cálculo de integrales sobre curvas	961
15.4.	Integrales sobre curvas de campos vectoriales	965
	Dominios conexos y simplemente conexos	968
	Independencia del camino	969
15.5.	Superficies e integrales de superficie	974
	Superficies paramétricas	974
	Superficies compuestas	976
	Integrales de superficie	977
	Superficies suaves, normales y elementos de área	977
	Cálculo de integrales de superficie	980
	Atracción de una corteza esférica	983
15.6.	Superficies orientadas e integrales de flujo	987
	Superficies orientadas	987
	Flujo de un campo vectorial por una superficie	988
	Repaso del capítulo	993

16**Cálculo vectorial****995**

16.1.	Gradiente, divergencia y rotacional	996
	Interpretación de la divergencia	998
	Distribuciones y funciones delta	1000
	Interpretación del rotacional	1002

16.2.	Algunas identidades con el gradiente, la divergencia y el rotacional	1005
	Potencial escalar y potencial vector	1007
	Cálculos con Maple	1010
16.3.	El Teorema de Green en el plano	1012
	El Teorema de la Divergencia en dos dimensiones	1016
16.4.	El Teorema de la Divergencia en el espacio tridimensional	1017
	Variantes del Teorema de la Divergencia	1022
16.5.	El Teorema de Stokes	1024
16.6.	Algunas aplicaciones en Física del cálculo vectorial	1030
	Dinámica de fluidos	1030
	Electromagnetismo	1032
	Electrostática	1032
	Magnetostática	1034
	Ecuaciones de Maxwell	1036
16.7.	Coordenadas curvilíneas ortogonales	1038
	Curvas coordenadas y superficies coordenadas	1040
	Factores de escala y elementos diferenciales	1041
	Grad, div y rot en coordenadas curvilíneas ortogonales	1045
	Repaso del capítulo	1049

17	Ecuaciones diferenciales ordinarias	1053
-----------	--	-------------

17.1.	Clasificación de las ecuaciones diferenciales	1054
17.2.	Solución de ecuaciones de primer orden	1057
	Ecuaciones separables	1058
	Ecuaciones homogéneas de primer orden	1058
	Ecuaciones exactas	1059
	Factores de integración	1060
	Ecuaciones lineales de primero orden	1061
17.3.	Existencia, unicidad y métodos numéricos	1062
	Existencia y unicidad de soluciones	1063
	Métodos numéricos	1065
17.4.	Ecuaciones diferenciales de segundo orden	1071
	Ecuaciones reducibles a primer orden	1071
	Ecuaciones lineales de segundo orden	1073
17.5.	Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes	1075
	Ecuaciones de orden superior con coeficientes constantes	1075
	Ecuaciones de Euler (equidimensionales)	1077
17.6.	Ecuaciones lineales no homogéneas	1079
	Resonancia	1081
	Variación de parámetros	1082
	Cálculos con Maple	1084
17.7.	Soluciones de ecuaciones diferenciales basadas en series	1085
	Repaso del capítulo	1089
Apéndice I. Números complejos		1091
	Definición de números complejos	1092

Representación gráfica de números complejos	1093
Aritmética compleja	1096
Raíces de números complejos	1100
Apéndice II. Funciones complejas	1105
Límites y continuidad	1106
La derivada compleja	1107
La función exponencial	1109
El Teorema Fundamental del Álgebra	1111
Apéndice III. Funciones continuas	1115
Límites de funciones	1116
Funciones continuas	1116
Complejidad y límites secuenciales	1117
Funciones continuas en un intervalo cerrado y finito	1119
Apéndice IV. La integral de Riemann	1123
Continuidad Uniforme	1126
Apéndice V. Realización de cálculos con Maple	1129
Lista de ejemplos de Maple con su presentación	1130
Respuestas a los ejercicios de numeración impar	1131
Índice alfabético	1185



Prólogo

Cuando un libro de texto alcanza su sexta edición, sus lectores han llegado a ciertas expectativas que un autor no puede ignorar. El objetivo de este texto sigue siendo presentar el cálculo de una forma clara, coherente y legible, y sobre todo de manera que sus lectores lo encuentren *interesante*. La creación de un libro completo ha sido también un objetivo; es mejor cubrir muchos contenidos en el entendimiento de que los profesores y los estudiantes deberán saltarse algunos, que no considerar suficientes contenidos para cubrir las necesidades de usuarios con intereses y formación previa muy diversos. Dos temas periféricos que estaban presentes en la cuarta edición y se omitieron en la quinta, concretamente, introducciones muy breves a las series de Fourier (Sección 9.9) y a las funciones de variable compleja (Apéndice II) se han recuperado a petición de algunos usuarios que lamentaron mucho su desaparición.

Esta edición tiene pocos cambios en el orden de presentación de los contenidos. Se ha añadido algún material (véase la lista posterior), y no se ha eliminado nada significativo. No obstante, los procesos habituales de reescritura y ajuste fino de la presentación y un pequeño cambio en el tamaño de las páginas han tenido como resultado un número de páginas significativamente inferior. Los principales cambios en el texto son pocos, y se enumeran a continuación:

- Se ha incluido un capítulo completo (Capítulo 17) sobre Ecuaciones Diferenciales, que ha reabsorbido parte del material de EDs diseminado previamente por todo el texto, por ejemplo, las soluciones de EDs basadas en series del Capítulo 9. Sin embargo, algunos aspectos elementales de EDs como la solución de ecuaciones separables de primer orden y ecuaciones lineales, que son buenas aplicaciones de la integración, y la solución de ecuaciones lineales de segundo orden de coeficientes constantes, cuyas soluciones se basan en recetas y utilizan las funciones exponenciales y trigonométricas, quedan en las Secciones 7.9 y 3.7, respectivamente. En los lugares adecuados del Capítulo 17, se hace referencia a estas secciones.
- Se han añadido varias páginas nuevas sobre probabilidad discreta al comienzo de la Sección 7.8 (Probabilidad). Aunque el propósito de esta sección es ilustrar el uso de la integración al estudiar la probabilidad, los conceptos básicos de probabilidad se presentan mejor comenzando con el caso discreto.
- La utilización de Maple para manejar vectores, matrices y funciones con valores vectoriales hace uso ahora de los nuevos paquetes «LinearAlgebra» y «VectorCalculus». Esto simplifica grandemente las cosas. Afecta a los capítulos desde el 10 en adelante y ha tenido como consecuencia la reescritura completa de la Sección 10.7.
- Se ha añadido al Capítulo P (Preliminares) una nueva sección sobre polinomios y funciones racionales.
- Las Secciones 4.7 (Aproximaciones Lineales) y especialmente la 4.8 (Polinomios de Taylor) han sufrido cambios considerables en la notación y la presentación. Además, la

Sección 9.6 (Series de Taylor y de Maclaurin) han tenido muchos cambios y han absorbido lo que antes era una sección separada revisando la Fórmula de Taylor. Ahora el enfoque completo del Teorema de Taylor está más unificado, aunque todavía está dividido entre los Capítulos 4 y 9.

Además de todo lo anterior, se han realizado numerosos pequeños cambios locales aquí y allá para mejorar el texto. Se han eliminado algunos ejemplos confusos o se han sustituido por otros más apropiados. Se han eliminado algunos ejercicios y se han añadido otros. Se han añadido algunas figuras nuevas y se han mejorado algunas otras. Se han cambiado algunas notaciones. Los intervalos abiertos se escriben ahora (a, b) del nuevo; aunque lógico, no parece adecuado. El proceso de hacer que el libro sea más agradable a los lectores sigue en curso y se basa en buena parte en los comentarios de los propios lectores.



Al estudiante

Cuando recibí mi primer curso de cálculo, no había un libro de texto prescrito, sino un libro denominado *Calculus Made Easy* que se recomendaba a todos aquellos que necesitábamos algo más que los apuntes tomados durante las clases. Compré el libro, esperando que sería como indicaba su título y que me facilitaría el aprendizaje del cálculo. No fue así.

¿Es el cálculo una materia muy difícil? No, realmente no, pero algunas veces se lo parece a los estudiantes, especialmente al principio, debido a las nuevas ideas y técnicas que se utilizan, y porque el éxito del aprendizaje del cálculo depende de tener una base muy sólida en las matemáticas previas (álgebra, geometría y trigonometría), sobre la que se pueda construir. Es conveniente revisar el material previo del Capítulo P (Preliminares) incluso si el profesor no lo menciona en clase. Al aprender cálculo dispondremos de herramientas muy útiles para analizar problemas en numerosos campos de interés, especialmente los que se consideran «científicos». Merece la pena adquirir estas herramientas, pero, como toda tarea que merece la pena, ésta requiere mucho esfuerzo de nuestra parte. No existe libro ni profesor que puedan evitar este requisito.

Al escribir este libro he intentado organizar el material de forma que resulte tan fácil como sea posible, pero no a expensas de «barrer las dificultades reales bajo la alfombra». Encontraremos que algunos conceptos son difíciles de entender cuando se presentan por primera vez. Cuando sea así, *debemos releer* el material despacio, si es necesario varias veces; *pensar sobre él*; formular preguntas para realizar a los estudiantes más experimentados, a nuestro tutor o a nuestro profesor. No hay que retrasarlo. Es importante resolver los problemas tan pronto como sea posible. Si no se entiende una cosa hoy, tampoco entenderemos cómo se aplica mañana. Las matemáticas son una «disciplina lineal»; construyen una idea basándose en la anterior.

Resolver ejercicios es la mejor forma de profundizar en nuestra comprensión del cálculo, y de convencernos de que lo hemos entendido. Este libro contiene numerosos ejercicios; demasiados para intentar resolverlos todos. Algunos de ellos son ejercicios directos, que nos ayudarán a desarrollar nuestras propias destrezas en cálculo. Sin embargo, son más importantes los problemas que ayudan a desarrollar las habilidades de razonamiento y la forma de aplicar las técnicas aprendidas a situaciones concretas. En algunos casos habrá que planificar la forma de resolver un problema que requiera varios «pasos» diferentes antes de llegar a la respuesta. Otros ejercicios están diseñados para ampliar la teoría desarrollada en el texto y mejorar, por tanto, nuestra comprensión de los conceptos del cálculo.

Los ejercicios varían grandemente en dificultad. En general, los más difíciles aparecen hacia el final de la serie de ejercicios, pero la serie completa no está graduada estrictamente de esta forma porque los ejercicios sobre un tema específico tienden a agruparse. Algunos ejercicios de las series regulares se marcan con un asterisco *. Este símbolo indica que el ejercicio es *o bien* algo más teórico *o* algo más difícil que la mayoría. Los que son más teóricos no tienen por qué ser difíciles; algunas veces son bastante fáciles. La mayoría de los problemas en la sección de




Problemas Avanzados, que forma parte del *Repaso del Capítulo* al final de la mayoría de los capítulos, tienen mayor dificultad, aunque en general no estén marcados con un *.

No hay que desanimarse si no podemos hacer *todos* los ejercicios. Algunos son de hecho muy difíciles, y sólo unos pocos estudiantes dotados serán capaces de resolverlos. Sin embargo, debemos ser capaces de realizar una amplia mayoría de ellos. Algunos requerirán mucho más esfuerzo que otros. Cuando encontramos dificultades con los problemas, es conveniente proceder como sigue:

1. Lea y vuelva a leer el problema hasta entender exactamente la información que se da y qué hay que calcular o qué hay que hacer.
2. Si es apropiado, dibuje un diagrama ilustrando las relaciones entre las magnitudes involucradas en el problema.
3. Si es necesario, introduzca símbolos para representar las magnitudes del problema. Utilice letras apropiadas (por ejemplo, V para volúmenes, t para el tiempo). No creamos necesario utilizar x e y para todo.
4. Desarrolle un plan de ataque. Esto es en general la parte más difícil. Busque relaciones conocidas; intente reconocer modelos; vuelva sobre los ejemplos desarrollados en la sección actual o en algunas secciones previas relevantes; intente descubrir posibles conexiones entre el problema bajo estudio y otros que se han visto anteriormente. ¿Se puede simplificar el problema realizando suposiciones adicionales? Si se puede resolver una versión simplificada, ello puede ayudarnos a decidir qué hacer con el problema dado: ¿se puede dividir el problema en varios casos, siendo cada uno de ellos un problema más simple? Al leer los ejemplos del texto, esté atento para descubrir métodos que puedan resultar útiles más adelante en otros contextos.
5. Intente seguir los pasos de su plan. Si tenemos problemas con alguno o varios de ellos, puede ser necesario modificar el plan.
6. Al llegar al resultado de un problema, pregúntese siempre si es *razonable*. Si no lo es, busque para determinar los lugares donde se puede haber cometido un error.

Las respuestas de la mayoría de los ejercicios con numeración impar se proporcionan al final del libro. Las excepciones son los ejercicios que no tienen respuestas cortas, por ejemplo «Demuestre que.» o «Pruebe que.», que son problemas donde la respuesta es la solución completa. Hay disponible un Manual de Soluciones para el Estudiante que contiene soluciones detalladas a los ejercicios con numeración par.

Además de los asteriscos utilizados para marcar los problemas más difíciles o teóricos, los símbolos siguientes se utilizan para marcar ejercicios de equipos especiales:

- ◆ Ejercicios pertenecientes a ecuaciones diferenciales y problemas de valor inicial (no se utiliza en secciones que están completamente dedicadas a EDs).
-  Problemas que requieren el uso de una calculadora. A menudo se necesitará una calculadora científica. Algunos de sus problemas pueden requerir una calculadora programable.
-  Problemas que requieren un *software* de gráficos por ordenador en un ordenador personal.
-  Problemas que requieren el uso de un ordenador. En general requerirán *software* de matemáticas por ordenador (por ejemplo, Maple o Mathematica) o bien un programa de hoja de cálculo (por ejemplo, Lotus 123, Excel de Microsoft o Quattro Pro).



Al profesor

Como sugiere su título, este libro pretende cubrir todo el material en programas de cálculo de tres o cuatro semestres, con funciones reales de una sola variable real (cálculo diferencial en los Capítulos 1-4 y cálculo integral en los Capítulos 5-8), así como funciones vectoriales de una sola variable real (en el Capítulo 11), funciones reales de varias variables reales (en los Capítulos 12-14), y funciones vectoriales de varias variables reales (en los Capítulos 15-16). El Capítulo 9 está dedicado a las secuencias y las series y su posición es más bien arbitraria. El Capítulo 10 contiene material básico necesario sobre vectores y geometría en el espacio tridimensional, y es de utilidad, aunque no absolutamente esencial, para la comprensión del material multivariable subsiguiente. La materia que se incluye es muy amplia para incluirla en cualquier curso. Se debe seleccionar qué material incluir y cuál omitir, teniendo en cuenta la formación previa y las necesidades de los estudiantes.

En la Universidad de British Columbia, donde el autor lleva enseñando 34 años, el cálculo se divide en cuatro trimestres; los dos primeros se ocupan del cálculo de una sola variable (Capítulos 1-9); el tercero trata las funciones de varias variables (parte del Capítulo 10, y los Capítulos 12-14), y es seguido por menos estudiantes, y el cuarto se ocupa del cálculo vectorial (parte del Capítulo 10, y los Capítulos 11, 15-16) y es seguido por un número relativamente reducido de estudiantes, principalmente de ciencias matemáticas, físicas e ingeniería. En ninguno de estos cursos hay suficiente tiempo como para tratar todo el material; siempre se omiten algunas secciones. Sin embargo, la amplia selección de temas y aplicaciones proporciona a los estudiantes una experiencia de aprendizaje rica y variada a los estudiantes.

El texto está diseñado para cursos de cálculo general, especialmente para los estudiantes de ciencias e ingeniería. La mayor parte del material requiere sólo un conocimiento previo razonable en álgebra y geometría analítica (*véase* el Capítulo P, Preliminares, donde se revisa este material). Sin embargo, alguna materia opcional es más sutil y/o teórica, y está dirigida principalmente a los estudiantes más duros.



Agradecimientos

Las primeras cinco ediciones de este texto se han utilizado para la impartición de clases en cursos de ciencias en general, de ingeniería y de matemáticas en la Universidad de British Columbia. Estoy agradecido a muchos colegas y estudiantes, tanto de la UBC como de muchas otras instituciones donde se han utilizado estos libros, por su apoyo y sus comentarios y sugerencias de utilidad.

Al preparar esta edición he recibido sugerencias de varios revisores que han proporcionado nuevas perspectivas y direcciones a mi trabajo. Estoy especialmente agradecido a las siguientes personas:

Pekka Alestalo	Universidad Tecnológica de Helsinki	Finlandia
Helge Dahle	Universidad de Bergen	Noruega
Marius Irgens	Universidad Noruega de Ciencia y Tecnología	Noruega
Michael Lamoureaux	Universidad de Calgary	Canadá
Tom Lindstrom	Universidad de Oslo	Noruega
Marlene McCallum	Universidad de Carleton	Canadá
Graene Pettet	Universidad Tecnológica de Queensland	Australia
Viena Statna	Universidad de Calgary	Canadá
Martin Stynes	Universidad Nacional de Irlanda, Cork	Irlanda
Brian Wetton	Universidad de British Columbia	Canadá
Eric Woolgar	Universidad de Alberta	Canadá
Frank Zorzitto	Universidad de Waterloo	Canadá

Finalmente, deseo agradecer a los departamentos de ventas y *marketing* de todas las divisiones mundiales de Addison Wesley (actualmente Pearson Canada) por hacer que las ediciones anteriores tuvieran tanto éxito, y en particular al departamento editorial y de producción de Toronto, a Meaghan Ealey, Michael Kelley, Kelly Torrance, Dave Ward y Mary Ann McCutcheon, por su ayuda y apoyo, y a Betty R. Robinson por su cuidadosa copia y edición del manuscrito inicial.

Yo escribí el volumen utilizando TEX y PostScript bajo Linux-Mandrake, y generé todas las figuras en PostScript utilizando el paquete de *software* matemático MG desarrollado por mi colega Robert Israel y por mí mismo.

La eliminación de errores y oscuridades del texto es siempre un proceso en curso y asintótico; felizmente, cada edición es mejor que la anterior. No obstante, algunas imperfecciones siempre quedan, y quedaré agradecido a los lectores que me las hagan saber o que me proporcionen sugerencias para mejoras futuras.

R. A. A.
Vancouver, Canadá
Abril 2005
adms@math.ubc.ca



¿Qué es el cálculo?

Al principio del siglo XVII el matemático alemán Johannes Kepler analizó un amplio número de observaciones astronómicas realizadas por el astrónomo danés Tycho Brahe y concluyó que los planetas se movían alrededor del sol en órbitas elípticas. Él no sabía por qué. Cincuenta años más tarde, el matemático y físico inglés Isaac Newton lo resolvió.

¿Por qué los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del sol? ¿Por qué los vientos de los huracanes giran en espiral en sentido contrario a las agujas del reloj en el hemisferio Norte? ¿Cómo se pueden predecir los efectos de los cambios de los tipos de interés en la economía y en los mercados de valores? ¿Cuándo desaparecerá suficiente material radiactivo para permitir un manejo seguro? ¿Cómo afectan las corrientes oceánicas calientes del Pacífico ecuatorial al clima del este de Norteamérica? ¿Cuánto tiempo permanece la concentración de un medicamento en sangre en niveles efectivos? ¿Cómo se propagan las ondas de radio por el espacio? ¿Por qué una epidemia se extiende cada vez más rápido y después se ralentiza? ¿Cómo puedo asegurar que el puente que acabo de diseñar no será destruido por una tormenta?

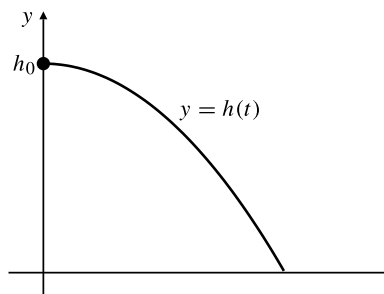
Estas y muchas otras cuestiones de interés e importancia en nuestro mundo se relacionan directamente con nuestra capacidad de analizar el movimiento y la forma en que las magnitudes cambian con respecto al tiempo o a otra magnitud. El álgebra y la geometría son herramientas útiles para describir relaciones entre magnitudes *estáticas*, pero en ellas no intervienen conceptos apropiados para describir cómo *cambia* una magnitud. Para hacer esto necesitamos nuevas operaciones matemáticas que van más allá de las operaciones algebraicas de suma, resta, multiplicación y división y del cálculo de potencias y raíces. Necesitamos operaciones que midan la forma en que varían magnitudes relacionadas.

El cálculo proporciona las herramientas para describir el movimiento cuantitativamente. Presenta dos nuevas operaciones denominadas *diferenciación* e *integración* que, como la suma y la resta, son opuestas entre sí; lo que hace la diferenciación, lo deshace la integración.

Por ejemplo, consideremos el movimiento de una roca que cae. La altura (en metros) de la roca t segundos después de que se lanza desde una altura h_0 es una función $h(t)$ dada por

$$h(t) = h_0 - 4.9t^2$$

La gráfica de $y = h(t)$ se muestra en la figura siguiente:



El proceso de diferenciación hace posible obtener una nueva función, que denotaremos $h'(t)$, y denominaremos *derivada* de h con respecto a t , que representa la *velocidad de cambio* de la altura de la roca, es decir, su velocidad en metros/segundo:

$$h'(t) = -9.8t$$

Al contrario, si conocemos la velocidad de la roca que cae en función del tiempo, la integración permite obtener la función altura $h(t)$.

El cálculo fue inventado de manera independiente y de forma algo diferente por dos matemáticos del siglo XVII: Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibnitz. La motivación de Newton era un deseo de analizar el movimiento de objetos móviles. Utilizando su cálculo pudo formular sus leyes del movimiento y de la gravitación y *concluir a partir de ellas* que los planetas debían moverse alrededor del sol en órbitas elípticas.

Muchas de las más fundamentales e importantes «leyes de la naturaleza» se expresan convenientemente en forma de ecuaciones en las que intervienen velocidades de cambio de magnitudes. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones diferenciales*, y las técnicas para su estudio y resolución están en el corazón del cálculo. En el ejemplo de la roca que cae la ley apropiada es la Segunda Ley de Newton del Movimiento:

$$\text{fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración}$$

La *aceleración* (-9.8m/s^2) es la velocidad de cambio (la *derivada*) de la velocidad, que es a su vez la velocidad de cambio (la *derivada*) de la función altura.

Una buena parte de las matemáticas se relacionan indirectamente con el estudio del movimiento. Vemos las *rectas* o las *curvas* como objetos geométricos, pero los antiguos griegos las veían como trayectorias trazadas por puntos en movimiento. No obstante, el estudio de las curvas requiere conceptos geométricos como tangencia o área. El problema de la diferenciación está estrechamente relacionado con el problema geométrico de obtener rectas tangentes; de forma similar, la integración está relacionada con el problema geométrico de calcular áreas de regiones con fronteras curvas.

Tanto la diferenciación como la integración se definen en función de una nueva operación matemática denominada **límite**. El concepto de límite de una función se desarrollará en el Capítulo 1. Ése será el comienzo real del estudio del cálculo. En el capítulo denominado Preliminares revisaremos algunos conocimientos previos de álgebra y geometría necesarios para el desarrollo del cálculo.